Vorträge.

Bericht über eine Abhandlung des Dr. Anton Müller, Professor der Mathematik in Zürich.

Von dem w. M. Prof. J. Petzval.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 21. Jänner 1858.)

Die von Dr. Anton Müller, Professor der Mathematik an der Universität in Zürich, eingesendete Abhandlung führt den Titel: Grundgesetze der Configuration der algebraischen Curven und ist in zwei Abschnitte getheilt:

I. Die fundamentalen Eigenschaften der algebraischen Gebilde überhaupt.

II. Die Grundgesetze der Configuration der algebraischen Curven.

Der Verfasser benützt die Bezeichnung Curve nur für solche Linien höherer Ordnung, deren Gleichung keine rationale Zerlegung zulässt, zum Unterschiede von Aggregaten und wendet in allen Fällen, wo es unentschieden bleibt, ob eine eigentliche Curve oder ein Aggregat vorliegt, die Bezeichnung: Gebilde an.

Der erste Abschnitt handelt von jenen Eigenschaften, die sowohl den eigentlichen Curven, als auch den Aggregaten zukommen. Der darin ersichtliche Gang der Untersuchung ist im Wesentlichen folgender:

$$(L) \qquad F(x, y) = 0$$

sei die allgemeine Gleichung der n^{ten} Ordnung zwischen den orthogonalen Coordinaten x, y mit völlig unbestimmten Coëfficienten. Es frägt sich nun zuvörderst, in welchen Punkten dieses Gebilde der n^{ten} Ordnung von einer geraden Linie geschnitten wird. Man setze also:

$$(M) \qquad x = r \cos u + \xi\,, \quad y = r \sin u + \eta.$$

Hier bedeuten ξ, η die Coordinaten eines beliebigen Punktes, durch welchen eine Gerade unter einem Winkel u gegen die Abscissenaxe gezogen ist, und r ist der Abstand des Durchschnittspunktes x, y vom Punkte ξ, η. Durch Einführung dieser Werthe für x, y in die Gebildegleichung $F=0$ geht sie in eine Gleichung zwischen ξ, η, u, r über, welche nach r vom n^{ten} Grade ist, nämlich in eine von folgender Gestalt:

$$(S)\quad F_n r^n + F_{n-1} r^{n-1} + F_{n-2} r^{n-2} + \ldots + F_1 r + F_0 = 0.$$

Die Coëfficienten F dieser Gleichung sind Ausdrücke, in welchen die drei Grössen ξ, η, u erscheinen; nur der erste Coëfficient F_n und der letzte F_0 machen hievon eine Ausnahme, insoferne F_n nur die einzige u, F_0 hingegen nur ξ und η in sich enthält.

Diese Gleichung, als nach r vom n^{ten} Grade, liefert in der Regel n verschiedene Werthe: $r_1, r_2, r_3, \ldots . r_n$ und wenn sie sämmtlich reell sind, werden hiemit n Durchschnittspunkte der Geraden mit dem Gebilde L der n^{ten} Ordnung angegeben.

Der Grad dieser Gleichung in r kann aber auch von niedrigerem Grade ausfallen, nämlich dann, wenn der Coëfficient F_n gleich Null wird. Wie schon früher erwähnt, ist F_n eine reine Function von u und folglich kann nur eine entsprechende Wahl des Winkels u, unter dem die schneidende Gerade gezogen wird, das Verschwinden von F_n und hiemit eine Erniedrigung der Gradzahl der Gleichung herbeiführen. Die Wahl des Punktes ξ, η, durch den diese Gerade hiedurchgeht, ist dabei völlig willkürlich.

Um den Bestandtheil $F_n\, r^n$ der obigen Gleichung zu gewinnen, hat man bei der Substitution der Werthe (M) alle jene Glieder zusammenzufassen, welche mit r^n multiplicirt sind. Diese Glieder können jedoch nur aus jenen Gliedern des Gleichungspolynomes (L) hervorgehen, bei welchen die Summe der Exponenten von x und y gleich n ist, d. h. aus dem Bestandtheile:

$$\mathfrak{T} = Kx^n + K_1 x^{n-1} y + K_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + K_n y^n$$

woraus man gewinnt:

$$F_n = K \cos^n u + K_1 \cos^{n-1} u \sin u + \ldots + K_n \sin^n u.$$

Hier findet sich die Richtigkeit der früheren Behauptung bestätigt, dass F_n von ξ und η frei ist; es ist ferner ersichtlich, dass die

Gleichung $F_n = 0$ für die Richtung u der schneidenden Geraden immer n Werthe (gleiche und imaginäre mit einbegriffen) liefert. Diese Richtungen u, welche der Gleichung $F_n = 0$ Genüge leisten, nennt der Verfasser asymptotische Richtungen und gelangt so zu dem wichtigen, wenn auch schon früher bekannten Satze:

Ein Gebilde der n^{ten} Ordnung hat stets n asymptotische Richtungen.

Der Verfasser knüpft hieran mancherlei wichtige Folgerungen: Da an der Gleichung $F_n = 0$, welche die asymptotischen Richtungen bestimmt, nicht alle Coëfficienten der Gebildegleichung $F(x, y) = 0$ Theil nehmen, sondern nur die Coëfficienten K des Bestandtheiles $\mathfrak{T}$ der n^{ten} Ordnung; so ist es klar, dass dieselben asymptotischen Richtungen allen jenen Gebilden der n^{ten} Ordnung gemeinschaftlich zukommen, deren Gleichungen in dem höchsten Bestandtheile $\mathfrak{T}$ übereinstimmen.

Die asymptotischen Richtungen können demnach auch zur Eintheilung der Curven n^{ter} Ordnung in Classen benützt werden und werden sich namentlich zur Bildung der Hauptabtheilungen eignen, insoferne sie nur von dem Bestandtheile $\mathfrak{T}$ des Gleichungspolynomes abhängen, der eben die Ordnungszahl n der Curve bestimmt, während sich andere Eigenschaften, die auch von den Gliedern niederer Ordnung abhängen, zur weiteren Unterabtheilung eignen.

Gerade so, wie das Nullwerden des ersten Coëfficienten F_n in der Gleichung (S) zu einer bemerkenswerthen Eigenschaft der Gebilde n^{ter} Ordnung geführt hat; ebenso leitet der Verfasser aus dem Verschwinden der nachfolgenden Coëfficienten F_{n-1}, F_{n-2}, ... F_2, F_1 andere wichtige Eigenschaften ab.

Bekanntlich ist der Quotient $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ gleich der Summe aller mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Wurzeln der Gleichung (S); dessgleichen ist $\frac{F_{n-2}}{F}$ gleich der Summe aller aus je zwei Wurzeln gebildeten Producte u. s. w. Wählt man für diese symmetrischen Functionen der Wurzeln r_1, r_2, r_3, . . . r_n die Bezeichnung:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = (r_1 r_2 r_3 \ldots r_n)^{(1)}$$
$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 + \ldots = (r_1 r_2 r_3 \ldots r_n)^{(2)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_1 r_2 r_3 \ldots r_n = (r_1 r_2 r_3 \ldots r_n)^{(n)}$$

so bestehen die Relationen:

$$\frac{F_{n-1}}{F_n} = -(r_1 r_2 r_2 \ldots r_n)^{(1)}, \quad \frac{F_{n-2}}{F_n} = (r_1 r_2 r_3 \ldots r_n)^{(2)}, \ldots$$

$$\frac{F_{n-q}}{F_n} = (-1)\,(r_1 r_2 r_3 \ldots r_n)^{(q)}, \ldots \frac{F_1}{F_n} = (-1)^{n-1}(r_1 r_2 r_3 \ldots r_n)^{(n-1)}$$

Wenn man dem Winkel u einen bestimmten Werth ertheilt, so verwandelt sich F_n in eine bestimmte Zahl, die übrigen F_{n-1}, $F_{n-2}, \ldots F_{n-q} \ldots F_1$ aber in Functionen der zwei Grössen ξ, η. Man kann nun eine jede dieser Functionen von ξ, η, z. B. die F_{n-q} gleich Null setzen. Die Gleichung:

$$F_{n-q} = 0$$

bestimmt nun gleichfalls ein Gebilde von einer gewissen Ordnung.

Es ist leicht, sich diesen analytischen Vorgang durch eine geometrische Betrachtung zu versinnlichen. Wenn man u bestimmt, aber ξ, η unbestimmt lässt; so bezeichnen die zwei Gleichungen (M) eine unendliche Anzahl von parallelen Geraden, welche mit der Abscissenaxe den bestimmten Winkel u einschliessen. Eine jede dieser Geraden schneidet das Gebilde L der n^{ten} Ordnung in n Punkten. Man kann nun auf jeder dieser parallelen Geraden TT einen Punkt O annehmen, von einer solchen Lage gegen die Durchschnittspunkte $P_1, P_2, \ldots P_n$, mit dem Gebilde L, dass die symmetrische Function der q^{ten} Ordnung, gebildet aus den Linienstücken:

$$OP_1 = r_1\ ,\ OP_2 = r_2\ ,\ OP_3 = r_3\ ,\ldots\ OP_n = r_n$$

nämlich:

$$(r_1 r_2 r_3 \ldots\ldots r_n)^{(q)}$$

gleich Null wird. Diese Punkte O auf den unendlich vielen parallelen Graden liegen in einem Gebilde höherer Ordnung.

Eine leichte Überlegung zeigt, dass F_{n-q} nach ξ und η vom Grade q sei, und folglich das in Rede stehende Gebilde $F_{n-q} = O$ von der Ordnung q.

Für diese Gebilde stellt der Verfasser die Benennung Diameter auf. Die geradlinigen Durchmesser der Linien zweiter Ordnung sind in dieser erweiterten Definition mit einbegriffen.

Bei einem Gebilde L der n^{ten} Ordnung hat man Diameter der ersten, zweiten, dritten, ... $n-1^{ten}$ Ordnung zu unterscheiden und zwar für jede beliebige Richtung u der Transversalen. Ihre Gleichungen sind:

$$F_{n-1} = 0 \ , \ F_{n-2} = 0 \ , \ F_{n-3} = 0 \ , \ldots . \ F_1 = 0.$$

All' das Gesagte gilt zunächst nur, wenn F_n von Null verschieden, also u keine asymptotische Richtung ist. Fällt aber u mit einer asymptotischen Richtung zusammen, so sind mehrere verschiedene Fälle möglich, wodurch die Anzahl der Diameter geringer wird, ja gar keine mehr bestehen, wie z. B. bei der Parabel der 2. Ordnung. Solche zu asymptotischen Richtungen gehörige Diameter besitzen ausgezeichnete Eigenschaften, wesshalb sich der Verfasser veranlasst sieht, dieselben mit einer eigenen Bezeichnung: asymptotische Diameter zu belegen.

Es versteht sich von selbst, dass die Diameter, als Gebilde höherer Ordnungen, gleichfalls asymptotische Richtungen und ihre eigenen Diameter besitzen; es ist ferner einleuchtend, dass alle diese Gebilde in enger Verbindung zu einander stehen und sich demnach auch zahlreiche Relationen ergeben.

Nach der Erörterung dieses interessanten Gegenstandes wendet sich der Verfasser zu einer Anwendung dieser Lehrsätze und zeigt, wie die asymptotischen Richtungen und Diameter zur Eintheilung der zu einer Ordnung gehörigen Gebilde dienen. Hiermit ist der 1. Abschnitt geschlossen.

Der 2. Abschnitt hat die Grundgesetze der Configuration der algebraischen Curven zum Gegenstande. Hier wird vorausgesetzt, dass die Gleichung des n^{ten} Grades

$$(L) \qquad F(x, y) = 0$$

keine Zerlegung in rationale Factoren verstatte.

Die Untersuchungen beginnen mit der Betrachtung der Abhängigkeit, welche zwischen der Tangentenrichtung und der Lage des Berührungspunktes bei algebraischen Curven der n^{ten} Ordnung stattfindet.

Die Gleichung:

$$(\mathfrak{D}_{n-1}) \qquad \frac{dF}{dx} \cos u + \frac{dF}{dy} \sin u = 0$$

ist, wie man sich leicht überzeugt, identisch mit der Gleichung $F_1 = o$. welche den zur Richtung u gehörigen Diameter der $n-1^{ten}$ Ordnung angibt, wenn nicht ξ, η, sondern x, y die laufenden Coordinaten bebezeichnen. Lässt man beide Gleichungen (L) und $(\mathfrak{D}_{n-1})$ gleichzeitig erfüllt sein, so sind x, y die Coordinaten der Punkte, welche die Curve L mit dem Diameter $\mathfrak{D}_{n-2}$ gemeinschaftlich hat, oder, was dasselbe ist, jene Punkte der Curve L, in welchen die Tangente die Richtung u hat. Aus den zwei Gleichungen (L), $(\mathfrak{D}_{n-1})$ kann man sich eine der beiden Coordinaten x, y, etwa x, eliminirt denken und gelangt nun offenbar zu einer Gleichung von der Form:

$$\psi\,(y\;,\;u) = 0$$

zwischen der Ordinate y des Punktes der Curve (L) und der Richtung u der dort gezogenen Tangente. Da nun die Gleichung $F\,(x, y) = 0$ keine Zerlegung in rationale Factoren gestattet, so ist dasselbe auch bei der $\psi\;(y, u) = 0$ der Fall. Die Tangentenrichtung u erscheint hier als eine Function der Ordinate y des zugehörigen Punktes der Curve. Aus dieser nothwendigen Abhängigkeit, die zwischen y und u stattfindet, lassen sich mancherlei Schlüsse ziehen bezüglich des Laufes der Curve, indem die successiven Änderungen der Tangentenrichtung u auf den Lauf der Curve Einfluss nehmen.

Zuvörderst ergibt sich, dass die Tangentenrichtung u als Function der Ordinate y nothwendig Maxima und Minima besitzt. Solche finden Statt, wenn das aus $\psi\,(y, u) = 0$ gezogene $\frac{du}{dy}$ gleich Null wird, oder, was dasselbe ist, wenn nebst den zwei Gleichungen (L) und $(\mathfrak{D}_{n-1})$ noch die dritte

$$(\mathfrak{D}_{n-2})\quad \frac{d^2F}{dx^2}cos^2u + 2\frac{d^2F}{dxdy}cos\,u\,.\,sin\,u + \frac{d^2F}{dy^2}sin^2\,u = 0$$

erfüllt ist. Diese letztere Gleichung ist von derjenigen nicht verschieden, welche den zur Richtung u gehörigen Diameter der $(n-2)$ Ordnung feststellt, und die im Vorhergehenden mit $F_2 = 0$ bezeichnet wurde. Die Punkte x, y der Curve L, deren zugehörige Tangentenrichtung u ein Maximum oder ein Minimum ist, mit anderen Worten, die Wendepunkte sind sonach gemeinschaftliche Punkte der Curve (L) und zweier Diameter $(\mathfrak{D}_{n-1})$ und $(\mathfrak{D}_{n-2})$, welche zu einerlei Richtung u gehören.

Die Wendepunkte theilen die Curve in Stücke, in deren Bereiche die Tangentenrichtung u sich nur in einem Sinne ändert (entweder nur wächst, oder nur abnimmt). Für solche Curvenstücke benützt der Verfasser die Benennung Bogen im Gegensatze zu dem bisherigen Sprachgebrauche, dem zu Folge ein jedes beliebige Stück einer Curve als Bogen bezeichnet wird.

Daran knüpfen sich nun mancherlei sehr interessante Folgerungen.

Ein Bogen kann von einer geraden Linie in höchstens zwei Punkten geschnitten werden. Je zwei unmittelbar aufeinander folgende Bogen einer Curve haben einen Wendepunkt gemeinschaftlich, sind aber in Bezug auf die in ihnen stattfindende Änderung der Tangentenrichtung ungleichartig, insoferne u im Bereiche des einen Bogens im Wachsen, im anderen aber im Abnehmen begriffen ist. Zwei solche Bogen, die einen gemeinschaftlichen Wendepunkt haben, können von einer geraden Linie höchstens in drei Punkten geschnitten werden. Allgemein werden $n-1$ auf einander folgende Bogen einer Curve, die durch Wendepunkte zusammenhängen, mit einer geraden Linie höchstens n Punkte gemeinschaftlich haben können. Die Vertheilungsart der Durchschnittspunkte auf den einzelnen Bogen lässt mehrere verschiedene Fälle zu, deren Anzahl aber dadurch beschränkt ist, dass kein Bogen mehr als zwei, ferner zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Bogen nicht mehr als drei Durchschnittspunkte, allgemein, r auf einander folgende Bogen, höchstens $r+1$ Durchschnittspunkte aufweisen können.

Würden mit den $n-1$ unmittelbar auf einander folgenden Bogen, welche mit einer geraden Linie n reelle Punkte gemeinschaftlich haben kann, noch andere Bogen folgen, so kann man aus der Eigenschaft, dass eine Curve der n^{ten} Ordnung mit einer geraden Linie höchstens n reelle Punkte gemeinschaftlich schliessen, dass sie alle von der Geraden nicht geschnitten werden. Es müssen demnach sowohl der erste, als auch der letzte der erwähnten $n-1$ Bogen einen eigenthümlichen Lauf einschlagen, verschieden von dem aller übrigen, so zwar, dass die Fortsetzung der Curve über den ersten und über den letzten dieser $n-1$ Bogen hinaus ausser den Bereich der schneidenden Geraden fällt.

Auf diesem Wege gelangt der Verfasser zu dem neuen Begriffe: Zone. Die Zone hat einen vollkommen bestimmten Anfangspunkt

und Endpunkt, welche Grenzpunkte auf dem ersten und auf dem letzten Bogen liegen, und zwar immer von den Wendepunkten verschieden sind.

Es drängt sich hier die Frage auf, ob das Vorkommen von Zonen nur eine zufällige Erscheinung oder mit der Natur der Curven nothwendig verbunden sei, ferner ob eine Curve nur aus Zonen oder auch aus anderen Curventheilen bestehe, die weder Zonen sind, noch Stücke von solchen. Der Verfasser beantwortet diese Frage und zeigt, dass Zonen bei Curven nothwendig erscheinen und das Auftreten von Curvenstücken, die keine Zonen sind oder Stücke von solchen, unmöglich sei.

Nach diesen Betrachtungen schreitet der Verfasser zur Untersuchung, aus wie vielen Zonen eine Curve der n^{ten} Ordnung zusammengesetzt sei und schlägt dabei einen eigenthümlichen Weg ein, der hier in Kürze angegeben werden soll. Der Verfasser geht von der Voraussetzung aus, dass in einer Zone AB, welche mit der Geraden TT n reelle Punkte gemein hat, die $n-2$ Wendepunkte, welche auf ihr liegen, in einen einzigen Punkt P zusammenfallen und dass die Gerade TT daselbst eine Tangente zur Curve sei. In diesem Falle ist der Punkt P ein relativ n-facher gemeinschaftlicher Punkt der Geraden TT und der Curve L. Dass diese Voraussetzung eine zulässige sei, erhellt daraus, dass die betreffende Segmentengleichung:

$$F_n r^n + F_{n-1} r^{n-1} + \ldots + F_2 r^2 + F_1 r + F_0 = 0$$

n gleiche Wurzeln Null besitzen müsse, wenn man den Punkt ξ, η mit P und die Richtung u mit jener der Geraden TT zusammenfallen lässt, was wieder das Erfülltsein folgender n Bedingungsgleichungen voraussetzt:

$$F_{n-1} = 0 \ , \ F_{n-2} = 0 \ , \ldots \ F_2 = 0 \ , \ F_1 = 0 \ , \ F_0 = 0.$$

Diese Gleichungen sind zu erfüllen durch eine zweckmässige Wahl von ξ, η, u und der Coëfficienten der Gleichung der Curve L und es ist leicht einzusehen, dass dies immer möglich sei. Eine solche Tangente, welche mit der Curve L einen relativ n-fachen Punkt gemeinschaftlich hat, nennt der Verfasser eine Monotangente und sucht nun die Frage zu beantworten: Wie viele Monotangente können an einer Curve der n^{ten} Ordnung vor-

kommen? Die Beantwortung dieser Frage steht mit der Angabe der Anzahl der Zonen in enger Verbindung. In der That entspricht einer jeden Monotangente eine Zone, und zwar eine solche, bei der die $n - 3$ mittleren Bogen und $n - 2$ Wendepunkte in einen einzigen Punkt zusammenschrumpfen. Es wäre also nur noch denkbar, dass eine Curve eine grössere Anzahl von Zonen, als Monotangenten besitze; allein dies würde wieder voraussetzen, dass nicht bei allen Zonen die $n - 2$ Wendepunkte zum Zusammenfallen gebracht werden können, was unmöglich ist. Es ist hieraus ersichtlich, dass die höchste Anzahl der Monotangenten mit der grössten Anzahl der Zonen identisch sei, und dass es sich demnach hier nur um die Beantwortung der eben erwähnten Frage handle.

Der Verfasser zeigt nun, dass bei einer Curve von ungerader Ordnung je drei Punkte P, in welchen sie von Monotangenten berührt wird, in einer geraden Linie liegen, während bei Curven von gerader Ordnung je drei solche Punkte P in einem Kegelschnitte liegen, welchen die Monotangenten berühren. Hieraus folgt nun, dass alle Punkte P, in welchen eine Curve der n^{ten} Ordnung von Monotangenten berührt wird, in einer geraden Linie liegen, wenn die Ordnungszahl n ungerade ist, hingegen in einem Kegelschnitte, wenn n gerade ist. Vermittelst dieses eleganten Satzes gelingt die Beantwortung der obigen Frage mit Leichtigkeit. Eine gerade Linie kann nämlich mit einer Curve der n^{ten} Ordnung höchstens n reelle Punkte gemeinschaftlich besitzen, folglich kann eine Curve von ungerader Ordnungszahl n nicht mehr als n Monotangenten und somit auch n Zonen besitzen. Eine Linie der 2. Ordnung hat mit einer Curve der n^{ten} Ordnung möglicher Weise $2n$ Punkte gemeinschaftlich, folglich kann nur in n Punkten eine Berührung der ersten Ordnung zwischen einer Curve der n^{ten} Ordnung und einer Kegelschnittslinie stattfinden und somit besitzt eine Curve von gerader Ordnungszahl n höchstens n Monotangenten und daher auch n Zonen.

Eine Curve von der Ordnung n, gleichgiltig, ob n gerade ist oder nicht, besitzt demnach höchstens n Zonen.

An diese interessanten Untersuchungen reihen sich noch einige wichtige Bemerkungen über die Wendepunkte. Zwischen den Coordinaten x, y eines Wendepunktes und der zu diesem Punkte gehörigen Tangentenrichtung u bestehen folgende drei Gleichungen:

$$(L) \qquad F = 0$$

$$(\mathfrak{D}_{n-1}) \qquad \frac{dF}{dx} \cos u + \frac{dF}{dy} \sin u = 0$$

$$(\mathfrak{D}_{n-2}) \quad \frac{d^2 F}{dx^2} \cos^2 u + 2 \frac{d^2 F}{dx dy} \cos u \sin u + \frac{d^2 F}{dy^2} \sin^2 u = 0.$$

Ein Wendepunkt ist hiernach ein gemeinsamer Punkt der Curve L und der zu einerlei Richtung u gehörigen Diameter D_{n-1} und D_{n-2}. Eliminirt man u aus den Gleichungen dieser beiden Diameter, so entspringt die Gleichung:

$$(W) \quad \frac{d^2 F}{dx^2}\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 - 2 \frac{d^2 F}{dx\,dy} \cdot \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dF}{dy} + \frac{d^2 F}{dy^2}\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 = 0$$

für ein Gebilde W, in welchem die gemeinsamen Punkte je zwei solcher Diameter liegen, die zu einerlei Richtung u gehören. Die gemeinsamen Punkte des Gebildes W und der Curve L sind die Wendepunkte von L. Es ist leicht ersichtlich, dass das Gebilde W nicht blos der einzigen Curve L eigen ist, weil das von x und y freie Glied der Gleichung:

$$F(x, y) = 0$$

bei der Bildung von W nicht eingeht. Mithin liegen in dem Gebilde W die Wendepunkte aller jener Curven, deren Gleichungen in den mit x und y versehenen Gliedern übereinstimmen, und die der Verfasser immer in eine Gruppe zusammenfasst. Da nun ferner zwei Curven, deren Gleichungspolynome sich nur im von x und y freien Gliede unterscheiden, keinen Punkt gemeinschaftlich besitzen können, so ist jeder Punkt des Gebildes W ein Wendepunkt von nur einer einzigen Curve L der Gruppe.

Jeder Punkt O des Gebildes W ist ein gemeinsamer Punkt zweier Diameter D_{n-1} und D_{n-2}, welche zu einerlei Transversalenrichtung u gehören; derselbe gehört also auch zu dieser Richtung u. Zieht man durch jeden Punkt des Gebildes W eine Gerade TT nach der zugehörigen Richtung u, so entsteht ein System von Geraden von besonderen Eigenthümlichkeiten. Eine jede solche Gerade TT ist

eine Wendetangente zu jener Curve L der Gruppe, welche mit TT durch denselben Punkt O des Gebildes W geht. Das vorausgesetzte System von Geraden ist also das System der Wendetangenten aller Curven der Gruppe, deren Wendepunkte in dem Gebilde W liegen. Diese Wendetangenten gehen entweder durch einen Punkt oder tangiren ein Gebilde Ω.

Nach diesen Untersuchungen geht der Verfasser über zu den Punkten der stärksten und der schwächsten Krümmung. Gleichwie die Betrachtung der Änderungen der Tangentenrichtung u als Ausgangspunkt bei den früheren Untersuchungen gedient und zu mehreren wichtigen Sätzen geführt hat; ebenso lassen sich die Änderungen, denen der Krümmungsradius beim Fortschreiten auf einer Curve unterliegt, zum Gegenstande der Betrachtung erwählen und zur Ableitung neuer Gesetze benützen.

An dem Wendepunkte besitzt der Krümmungsradius stets einen unendlich grossen Werth; im Bereiche eines Bogens aber finden nur stetige Änderungen desselben Statt, wobei sein Vorzeichen unverändert bleibt. Hieraus folgt nun nothwendig, dass im Bereiche eines jeden Bogens mindestens ein Maximum oder Minimum des Krümmungsradius stattfindet. Die Anzahl der Maxima und Minima im Bereiche eines Bogens kann aber auch grösser sein, als Eins, ist jedoch nothwendig eine ungerade Zahl. In den Punkten der Curve, in welchen der Krümmungsradius ein Maximum oder ein Minimum ist, bestehen zwischen den Coordinaten x, y und der zugehörigen Tangentenrichtung u folgende drei Gleichungen:

$$(L) \qquad F = 0$$

$$(\mathfrak{D}_{n-1}) \qquad \frac{dF}{dx} \cos u + \frac{dF}{dy} \sin u = 0$$

$$0 = \left(\frac{dF}{dx} \sin u - \frac{dF}{dy} \cos u\right)\left(\frac{d^3F}{dx^3} \cos^3 u + 3\,\frac{d^3F}{dx\,dy^2} \cos u \,.\, \sin^2 u + \right.$$

$$(\mathfrak{K}) \qquad \left. + 3\,\frac{d^3F}{dx^2\,dy} \cos u \,.\, \sin^2 u + \frac{d^3F}{dy^3} \sin^3 u\right) +$$

$$+ 3\left[\left(\frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dx^2}\right) \cos u \,.\, \sin u + \frac{d^2F}{dx\,dy} (\cos^2 u - \sin^2 u)\right] \times$$

$$\times \left[\left(\frac{d^2F}{dx^2} \sin^2 u + 2\,\frac{d^2F}{dx\,dy} \cos u \,.\, \sin u + \frac{d^2F}{dy^2} \sin^2 u\right].$$

Hiernach ist der in Rede stehende Punkt der Curve L dem zur Richtung u gehörigen Diameter $\mathfrak{D}_{n-1}$ und einem Gebilde $\mathfrak{K}$, welches ebenfalls von der Richtung u abhängt, gemeinschaftlich. Durch Elimination von u aus ($\mathfrak{D}_{n-1}$) und ($\mathfrak{K}$) kann man eine Gleichung zwischen x und y ableiten, der ein Gebilde $\mathfrak{B}$ entspricht, in welchem die gemeinsamen Punkte je zwei solcher Gebilde $\mathfrak{D}_{n-1}$ und $\mathfrak{K}$ liegen, die zu einerlei Richtung gehören. Bei der Bildung der Gleichung ($\mathfrak{B}$) bleibt das von x und y freie Glied der Gleichung ($\mathfrak{L}$) unberücksichtigt, daher denn das Gebilde $\mathfrak{B}$ alle Punkte der Krümmung Maximum und Minimum aller jener Curven $\mathfrak{L}$ in sich schliesst, die zu einer Gruppe gehören. Es lassen sich hier analoge Bemerkungen machen, wie früher bei dem Gebilde $\mathfrak{K}$, in welchem die Wendepunkte liegen.

Schliesslich macht der Verfasser noch aufmerksam auf die grosse Übereinstimmung, welche zwischen der Betrachtung der Änderungen der Tangentenrichtung u und der Nachweisung der wechselnden Krümmung der Curven besteht und knüpft hieran die Bemerkung, dass der dabei eingeschlagene Weg sich auch auf andere Fälle anwenden lasse, wo es sich um Änderungen irgend einer Grösse r handelt, die mit der Curve in irgend einer Beziehung steht, wie im gegenwärtigen Falle die Tangentenrichtung u und der Krümmungshalbmesser. In einem jeden solchen Falle ergibt sich ein auf die Configuration der Curven bezügliches Gesetz. Hiemit schliesst die Abhandlung.

Dass der Verfasser in dieser seiner Arbeit eine neue, ihm eigenthümliche Discussionsweise der algebraischen Curven, die an Einfachheit in ihren Grundbegriffen sowohl, wie ihren Verfahrensweisen kaum etwas zu wünschen übrig lässt, geliefert habe, dürfte aus dieser Besprechung des Inhaltes klar sein. Er beschäftigt sich schon seit längerer Zeit mit diesem so interessanten Gegenstande und hat schon im Jahre 1850 in einer Druckschrift, betitelt: Die Fundamentalgesetze der höheren Geometrie, einiges von seinen Ansichten niedergelegt, gleichwohl hebt sich die gegenwärtige Arbeit durch ihre gediegene Einfachheit, die ihr erst den Werth eines neuen Werkzeuges der Wissenschaftsforschung ertheilt, vor dieser älteren so vortheilhaft heraus, dass man sie füglich eine ganz neue nennen kann. Ohne irgendwie den Werth der bisher versuchten Aufzählungen der Curven höherer Ordnungen, namentlich des dritten

und vierten Grades von Plücker und Anderen zu verkennen, ohne in Abrede zu stellen, dass der Kunstgriff des Schneidens einer Curve durch eine gerade Linie ein älterer, schon von Cauchy gebrauchter sei, dass das Aufsuchen der asymptotischen Richtungen ebenfalls nicht neu erscheine, muss man doch zugeben, dass dem Verfasser eben dadurch, dass er von der Jedermann geläufigeren Anschauungsweise den Ausgang nimmt, ein nicht unerhebliches Verdienst erwachse. Die von ihm so glücklich ausgebildeten Begriffe des Bogens, der Bogenzone, Monotangente u. s. w. enthalten des Neuen und Fruchtbaren genug, womit er die Wissenschaft bereichert und zur Ausbildung eines der vorzüglichsten Werkzeuge der mathematischen Erkenntniss, geometrische Anschauung nämlich, beigetragen hat.